

# **STATIKA TUHÝCH TĚLES**

---

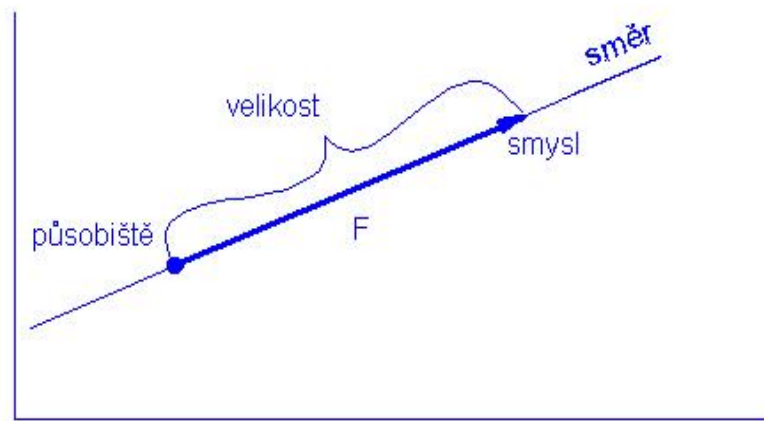
Studijní obor: Dopravní prostředky

Ing. Jan JINDRA

1.9.2011

## Tělesa volná:

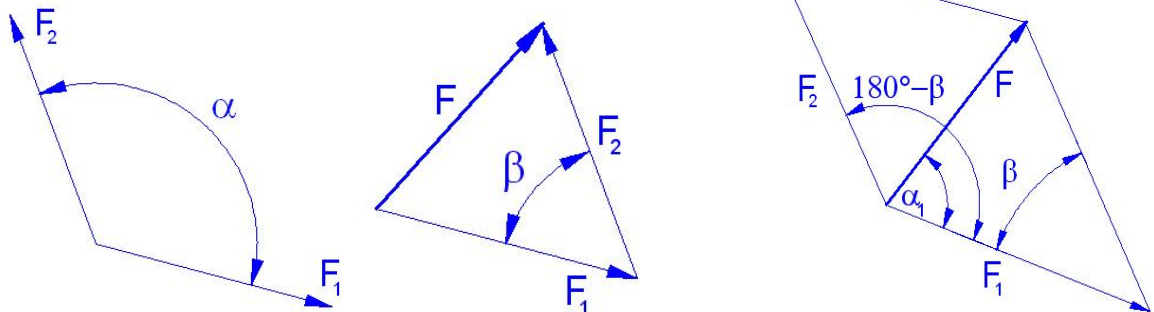
**Určení síly:** působiště, velikost, směr a smysl



**Přeložení působiště síly:** lze přeložit ve směru síly do jiného bodu, pevně spojeného s původním, aniž by došlo ke změně rovnováhy. Dojde však ke změně namáhání tělesa.

**Síly téhož směru** = sčítání a odečítání sil (graficky i výpočtem).

**Dvě síly různých směrů** ve stejném působišti = sčítání vektorů graficky – silový trojúhelník.



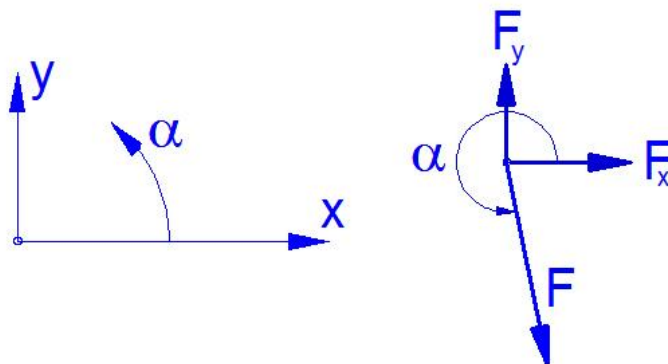
**Výsledná síla** -  $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta}$  nebo  $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$

úhel mezi silou  $F_1$  a silou  $F$   $\rightarrow \sin\alpha_1 = \frac{F_2}{F}\sin\alpha$

**Rozklad síly do dvou směrů** – graficky  $\rightarrow$  silový trojúhelník.

Rozklad síly do směrů souřadného systému  $\rightarrow$  výpočtem

Výsledné složky volíme v kladných směrech os  $x$  a  $y$ . Pokud výpočtem vyjdou složky záporné, síly míří opačným směrem. Použitý úhel je orientován od kladné poloosy  $x$  ve směru proti směru hodinových ručiček.



$$F_x = F \cdot \cos \alpha ; \quad F_y = F \cdot \sin \alpha$$

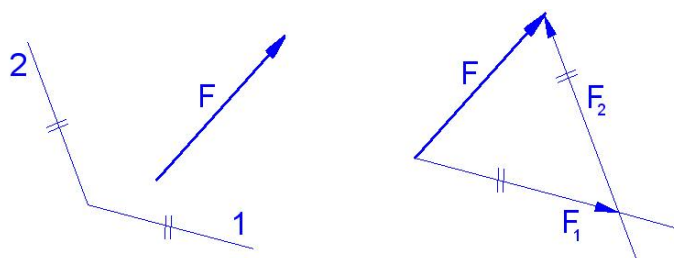
**Skládání více sil:** výpočtem – sečtením složek do směrů x a y

$$F_x = \sum F_i \cdot \cos \alpha_i ; \quad F_y = \sum F_i \cdot \sin \alpha_i$$

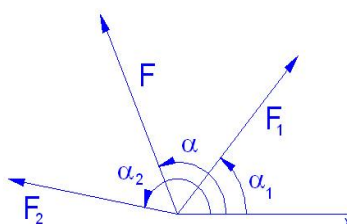
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} ; \quad \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{F_y}{F_x} \right) \dots \text{pro } F_x < 0 \text{ je } \alpha = \alpha + 180^\circ, \dots$$

**Rozklad síly do dvou obecných směrů se společným působištěm** – sílu lze jednoznačně rozložit pouze do dvou různoběžných směrů, pokud se protínají na původní síle.

- **graficky:** rozkladem do silového trojúhelníku – rovnoběžně na začátku a konci síly

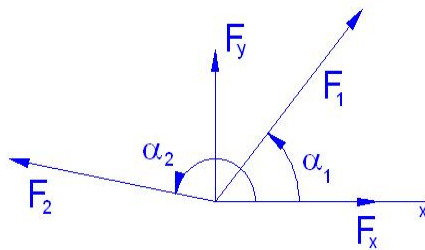


- **výpočtem:** (úhly v rovině jsou orientovány proti směru hodinových ručiček směrem od kladné poloosy „x“)



$$F_1 = F \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha_2 - \cos \alpha \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2} ; \quad F_2 = F \cdot \frac{\cos \alpha \sin \alpha_1 - \sin \alpha \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2} ; \text{ pokud vyjdou záporné, mají opačný smysl než v schématu}$$

- **výpočtem ze známých složek síly  $F_x$  a  $F_y$**  (složky získané např. z několika sil  $F_x = \sum F_i \cdot \cos \alpha_i$ ,  $F_y = \sum F_i \cdot \sin \alpha_i$ )

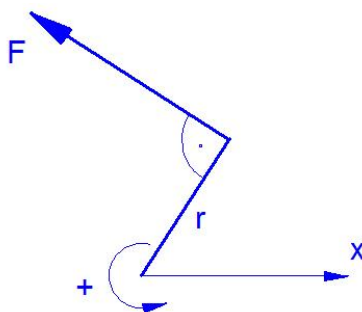


$F_1 = \frac{F_y \cos \alpha_2 - F_x \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}$  ;  $F_2 = \frac{F_x \sin \alpha_1 - F_y \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}$  ; pokud vyjdou záporné, mají opačný smysl než v schématu

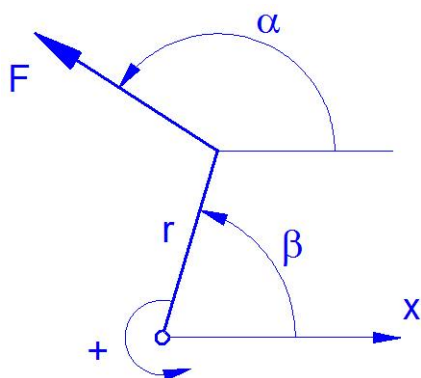
**Rovnováha sil:**  $\sum F_i = 0 \Rightarrow \sum F_{xi} = 0 ; \sum F_{yi} = 0$

**Moment síly** = síla x rameno  $M = F \cdot r$

**Rameno síly** = kolmá vzdálenost směru síly od otočného bodu.



**Moment obecné síly na obecné páce**  $M = F \cdot r \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta)$



Posunutí momentu – lze ho posouvat libovolným směrem do bodu pevně spojeného s původním, aniž by došlo ke změně rovnováhy. Dojde však ke změně namáhání tělesa.

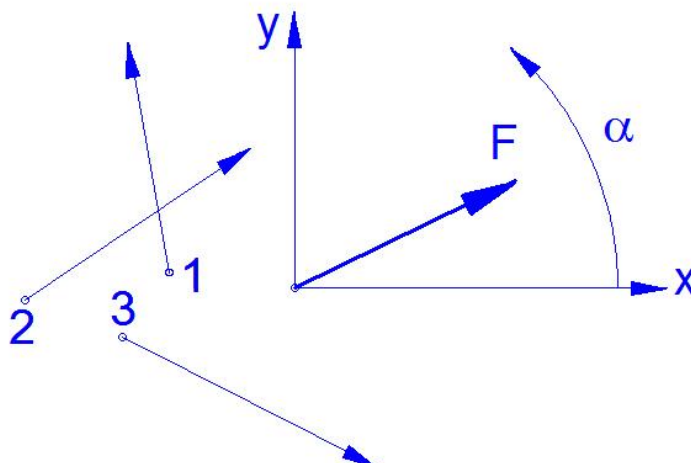
**Sčítání momentů**  $M = \sum M_i$

Rovnováha momentů  $\sum M_i = 0 \Rightarrow \sum F_i \cdot (x_i \cdot \sin \alpha_i - y_i \cdot \cos \alpha_i) = 0$

**Podmínky rovnováhy tělesa:** součet všech sil = 0 a součet všech momentů = 0. V rovině to představuje soustavu tří rovnic.

1: $\sum F_{xi} = 0$ ; 2: $\sum F_{yi} = 0$ ; 3: $\sum M_i = 0$
---

**Rozklad síly do tří různoběžných směrů**, které nemají společný průsečík:  
(Sílu v rovině lze rozložit nejvýše do 3 různoběžných směrů, které se neprotínají v jednom bodě!)



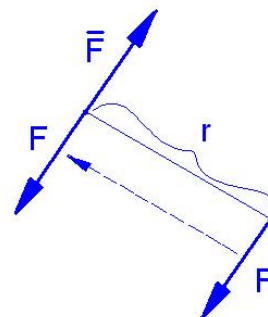
Řešení výpočtem ze soustavy tří rovnic rovnováhy

$$1: F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F_3 \cdot \cos \alpha_3 - F \cdot \cos \alpha = 0$$

$$2: F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 + F_3 \cdot \sin \alpha_3 - F \cdot \sin \alpha = 0$$

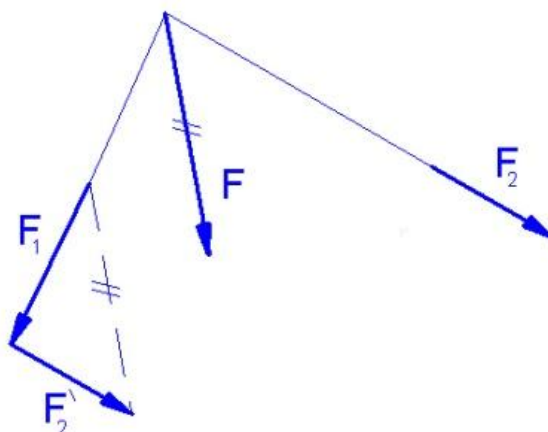
$$3: F_1 \cdot (x_1 \cdot \sin \alpha_1 - y_1 \cdot \cos \alpha_1) + F_2 \cdot (x_2 \cdot \sin \alpha_2 - y_2 \cdot \cos \alpha_2) + F_3 \cdot (x_3 \cdot \sin \alpha_3 - y_3 \cdot \cos \alpha_3) = 0$$

**Silová dvojice** = moment dvou stejných sil s opačným smyslem  $\mathbf{M} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$

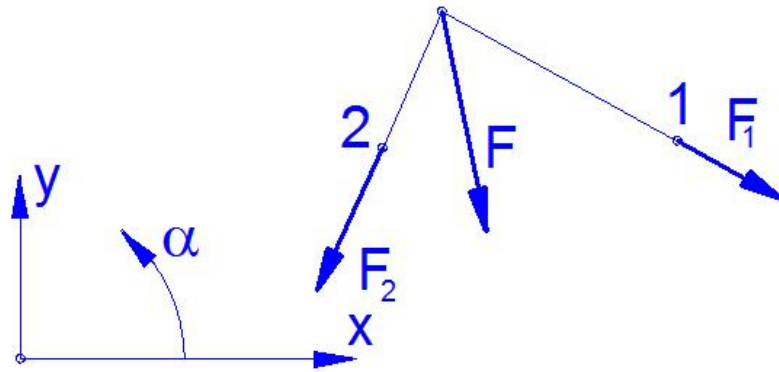


**Posunutí síly** = doplnění o dvojici sil ( $M = F \cdot r$ )

**Sčítání dvou sil o různých působištích**: graficky → výsledná síla prochází průsečíkem směrů obou sil. Její velikost a směr je dána ze silového trojúhelníku.



výpočtem – rozkladem do směrů x a y, dvě rovnice momentové rovnováhy



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1; F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2; F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1; F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2$$

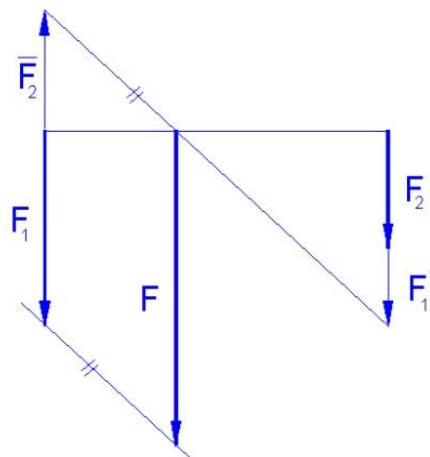
$$F_x = F_{1x} + F_{2x}; F_y = F_{1y} + F_{2y}; F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2};$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{F_y}{F_x} \right), \quad \text{pro } F_x < 0 \text{ je } \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{F_y}{F_x} \right) + 180^\circ$$

$$F_{1y} \cdot x_1 + F_{2y} \cdot x_2 = F_y \cdot x \rightarrow x = \frac{F_{1y} \cdot x_1 + F_{2y} \cdot x_2}{F_y} = \frac{F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot x_2}{F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2}$$

$$F_{1x} \cdot y_1 + F_{2x} \cdot y_2 = F_x \cdot y \rightarrow y = \frac{F_{1x} \cdot y_1 + F_{2x} \cdot y_2}{F_x} = \frac{F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot y_2}{F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2}$$

### Sčítání dvou rovnoběžných sil: graficky



– výpočtem (použitelné i pro více sil) - celková velikost je dána součtem sil, umístění je v „těžišti“ sil (momentovou rovnováhou).

$$F = F_1 + F_2$$

**|F**

$$F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 = F \cdot x$$

$$\Rightarrow x = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2}{F}$$

pro více sil $x = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i}$
--

### **Těžiště:**

přitažlivá síla působí na každou hmotnou část tělesa – gravitační síly jsou rovnoběžné → těžiště je působištěm výslednice gravitačních sil. Jeho poloha je dána tvarem tělesa => Proto u homogenních těles mluvíme o těžišti tvaru – jeho poloha je ...

Objemové těleso (objem)  $x_T = \frac{\sum V_i \cdot x_i}{\sum V_i} = \frac{\sum V_i \cdot x_i}{V}$

Plošné těleso (plocha)  $x_T = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{\sum S_i} = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{S}$

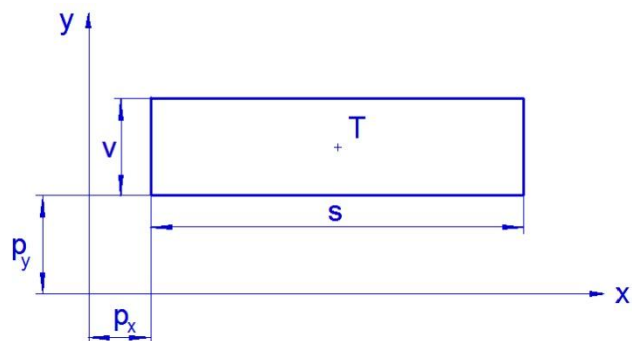
Drátové těleso (čára)  $x_T = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{\sum l_i} = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{l}$

Součin  $l_i \cdot x_i$ ,  $V_i \cdot x_i$ ,  $S_i \cdot x_i$  je tzv. statickým momentem.

Tato metoda je vhodná pro zpracování v tabulkovém procesoru (Excel).

### Vlastnosti geometrických tvarů:

Obdélník

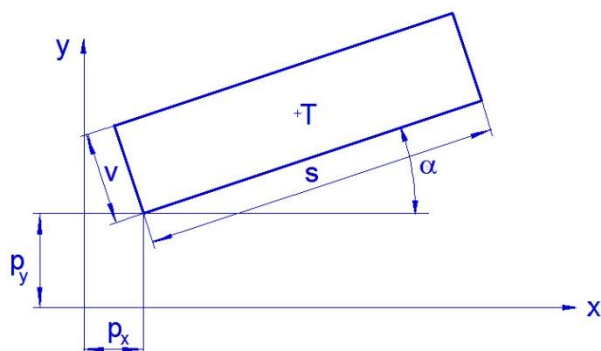


$$S = s \cdot v$$

$$x_i = p_x + \frac{s}{2}$$

$$y_i = p_y + \frac{v}{2}$$

Natočený obdélník

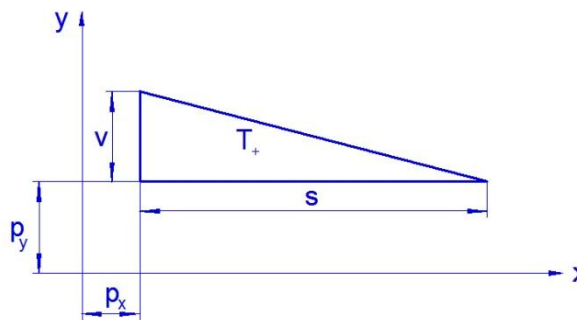


$$S = s \cdot v$$

$$x_i = p_x + \frac{s}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{v}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$y_i = p_y + \frac{v}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{s}{2} \cdot \cos \alpha$$

### Pravoúhlý trojúhelník

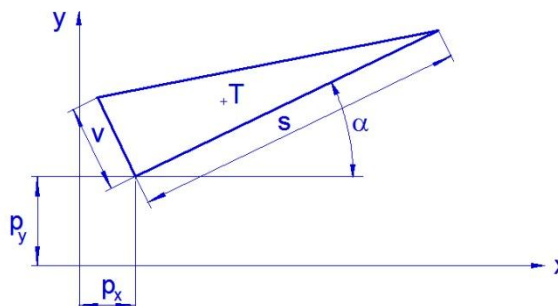


$$S = \frac{s \cdot v}{2}$$

$$x_i = p_x + \frac{s}{3}$$

$$y_i = p_y + \frac{v}{3}$$

### Natočený trojúhelník

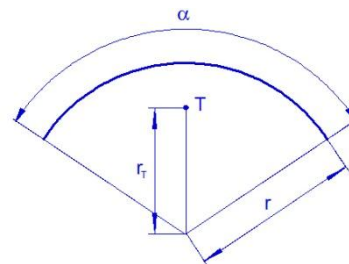


$$S = \frac{s \cdot v}{2}$$

$$x_i = p_x + \frac{s}{3} \cdot \cos \alpha - \frac{v}{3} \cdot \sin \alpha$$

$$y_i = p_y + \frac{v}{3} \cdot \sin \alpha + \frac{s}{3} \cdot \cos \alpha$$

### Délka a poloha těžiště kruhového oblouku



$$l = \frac{\pi \cdot \alpha}{180}$$

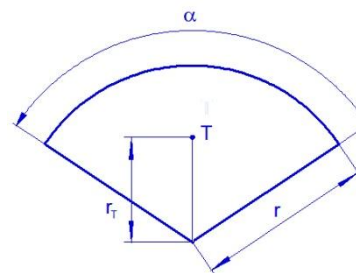
$$r_t = r \cdot \frac{\sin(\alpha/2)}{\pi \alpha / 360} \quad \dots \text{ pro } \alpha = 180^\circ$$

$$r_t = \frac{2r}{\pi}$$

$$\dots \text{ pro } \alpha = 90^\circ$$

$$r_t = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi}$$

### Plocha a poloha těžiště kruhové výseče



$$S = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360}$$

$$r_t = r \cdot \frac{2 \cdot \sin(\alpha/2)}{3\pi \cdot (\alpha/360)}$$

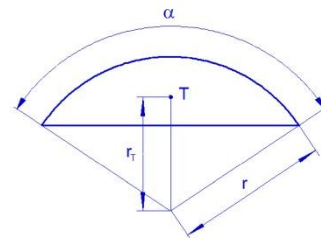
$$\dots \text{ pro } \alpha = 180^\circ \quad r_t = \frac{4r}{3\pi}$$

$$\dots \text{ pro } \alpha = 90^\circ \quad r_t = \frac{4r\sqrt{2}}{3\pi}$$



## Plocha a poloha těžiště kruhové úseče

$$S = \frac{r^2}{2} \cdot \left( \frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right) \quad r_t = r \cdot \frac{4 \sin^3(\alpha/2)}{3(\pi \alpha/180 - \sin \alpha)}$$

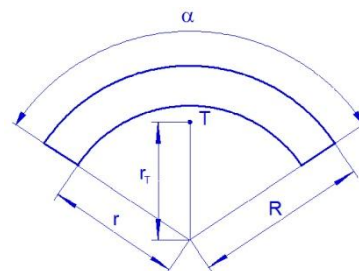


$$\dots \text{ pro } \alpha = 180^\circ \quad r_t = \frac{4r}{3\pi}$$

$$\dots \text{ pro } \alpha = 90^\circ \quad r_t = \frac{2r\sqrt{2}}{3(\pi-2)}$$

## Plocha a poloha těžiště mezikruhové výseče

$$S = \frac{\pi \alpha}{360} \cdot (R^2 - r^2) \quad r_t = \frac{4(R^3 - r^3) \sin(\alpha/2)}{3(R^2 - r^2)(\pi \alpha/180)}$$



$$\dots \text{ pro } \alpha = 180^\circ \quad r_t = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)}$$

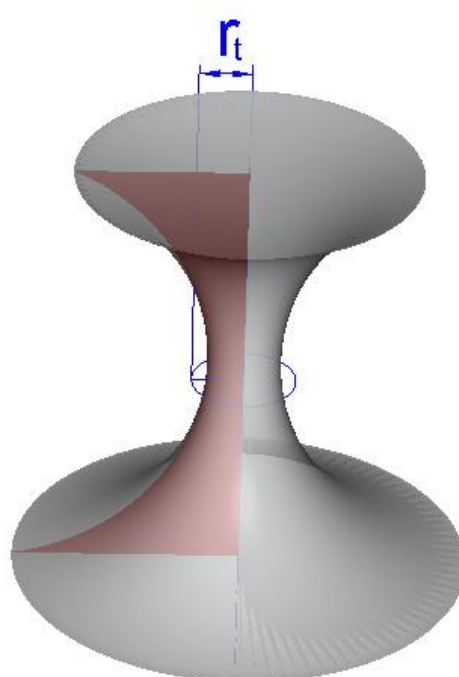
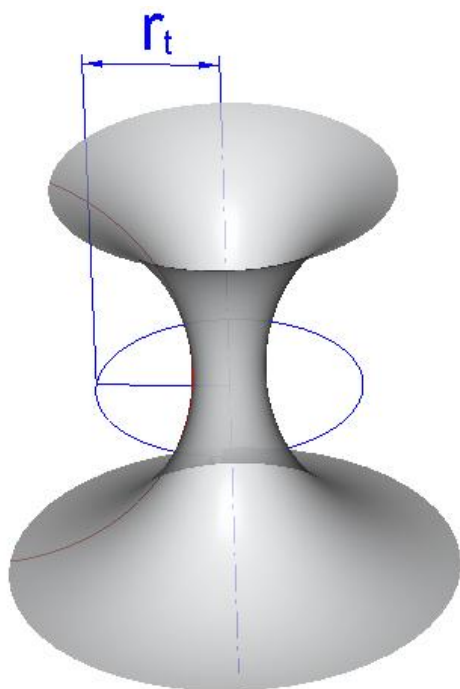
$$\dots \text{ pro } \alpha = 90^\circ \quad r_t = \frac{4\sqrt{2}(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)}$$

## Plocha a objem rotačních tvarů – Guldinovy věty (využití znalosti polohy těžiště)

Plocha rotačního tělesa:  $S = l \cdot 2\pi r_t$

Objem rotačního tělesa:  $V = S \cdot 2\pi r_t$

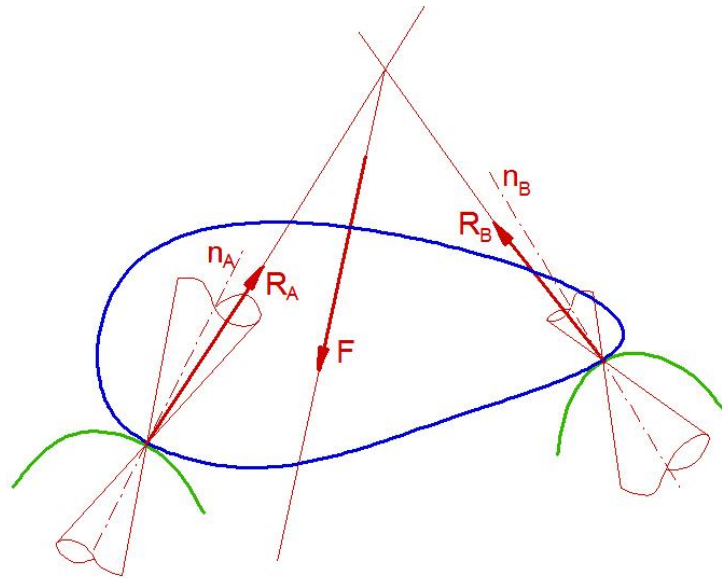
Kde  $r_t$  je kolmá vzdálenost těžiště od osy rotace a  $2\pi r_t$  je tedy délka kružnice, kterou opisuje těžiště kolem osy.



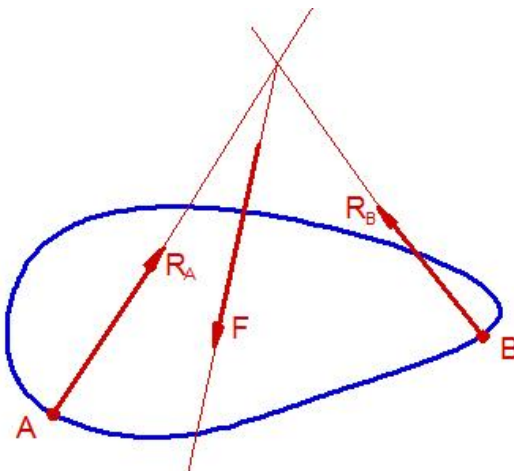
## **Statika těles nevolných:**

Ve skutečnosti jsou všechna tělesa vzájemně vázána = nejsou tedy volná.

**Reakce** = síla ve styku dvou těles – v podpoře. Mají-li být tělesa vzájemně klidu, nesmí reakce být mimo třecí kužel. Těleso na dvou (nebo více) podporách je v klidu procházejí-li všechny síly (reakce i výslednice tíhy a zatížení) jediným bodem = jejich průsečíkem.

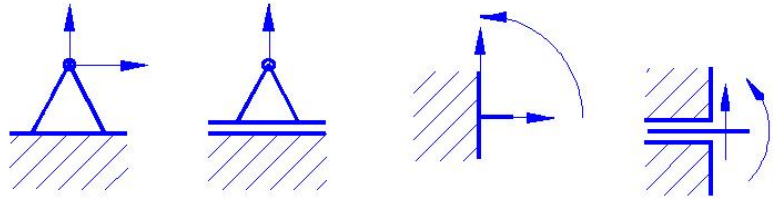


Podpírající těleso můžeme odstranit, pokud ho nahradíme působící silou = reakcí. Zatížení tělesa se nezmění. Styk podpor s tělesy je ve skutečnosti plošný nikoli bodový. Pokud nezkoumáme nejbližší okolí podpory, jedná se o zanedbatelné zjednodušení.



**Druhy podpor:** kloubová, posuvná, vetknutí a výsuvná – umožňují omezený počet stupňů volnosti (jen některé z posuvných pohybů nebo otáčení) – přenášení jen některé složky síly nebo momenty.

Jednotlivé druhy podpor,  
reakce v podporách – síly  
a momenty vždy  
v kladném směru.

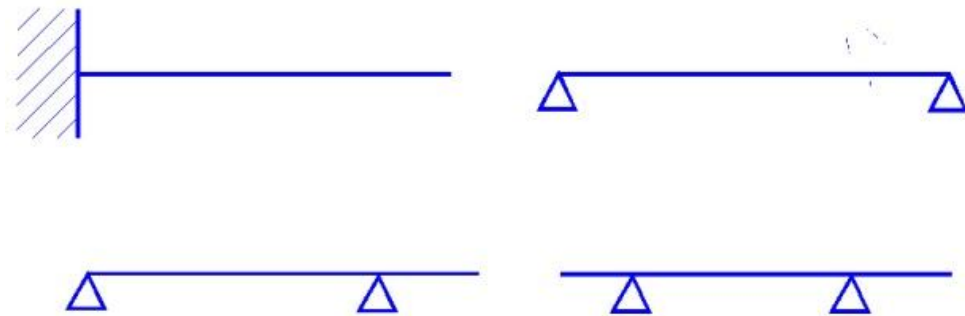


### **Nosníky:** (zatížení v rovině) – nosníky přímé

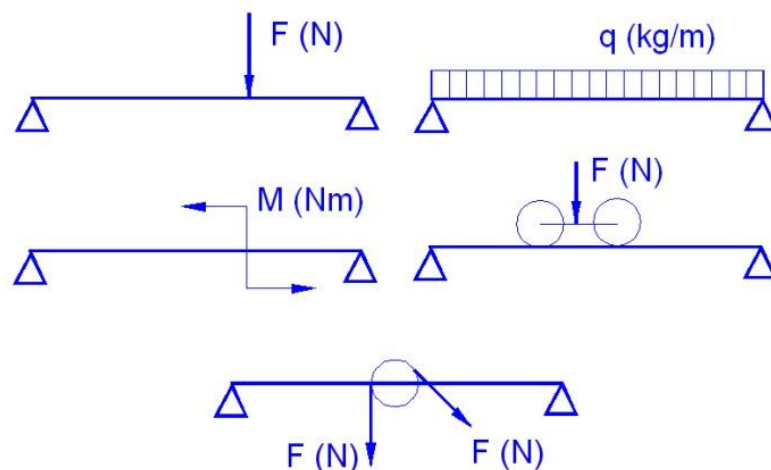
tělesa na dvou nebo jedné podpoře = > maximálně tři neznámé reakce  
vypočteme ze tří rovnic rovnováhy => nosníky staticky určité.

1.  $\sum F_{xi} = 0$
2.  $\sum F_{yi} = 0$
3.  $\sum M_i = 0$

Nosníky: vetknuté, na dvou podporách a převislé.



Zatížení: osamělou silou, spojitě, momentem, pojezdem a kladkou.

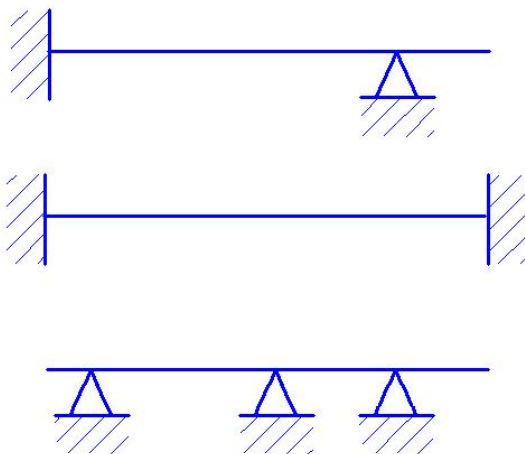


Spojitě zatížení (většinou se jedná o zatížení vlastní vahou) nahradíme osamělou silou působící v těžišti zatížení (u rovnoměrného zatížení uprostřed).

Podpory nahradíme reakcemi (směr reakcí volíme v kladném směru) – počítáme jako volné těleso a z rovnic rovnováhy vypočteme neznámé reakce. Momentovou rovnici sestavíme pro otočný bod v podpoře -> reakce v této podpoře se neobjeví v momentové rovnici (mají nulové rameno).

Pokud reakce výpočtem vyjdou záporné mají opačný smysl, než byl původně zvolen.

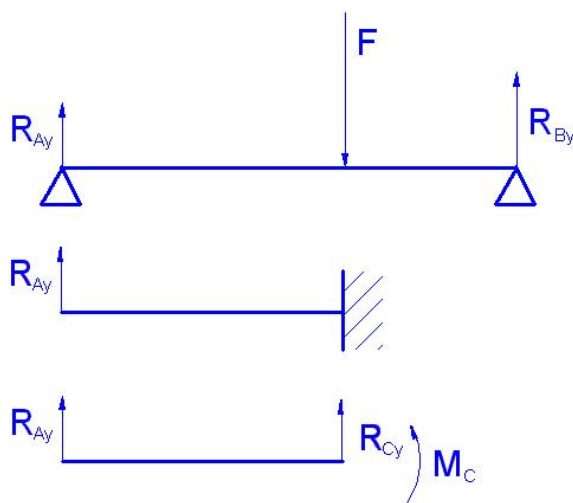
Nosníky staticky neurčité obsahují více neznámých reakcí než kolik je rovnic rovnováhy – jejich výpočet je založen na dalších podmínkách (rovnících) o zadaných průhybech (není obsahem tohoto textu).



#### Výpočet namáhání nosníku v libovolném místě:

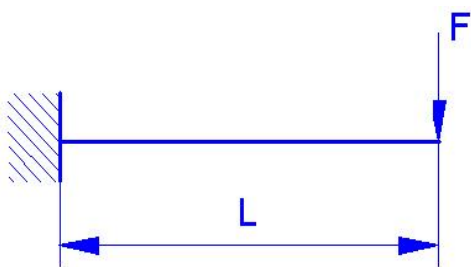
Saint Venantův princip: je-li těleso v rovnováze, je v rovnováze i jeho libovolná část.

Nosník fiktivně rozdělíme v místě výpočtu zatížení a sestavíme rovnice rovnováhy pro jeho jednu část. Vybereme si tu část, které má méně zatěžujících sil. V místě rozdělení nahradíme zbývající část nosníku vetknutím. Vypočteme reakce a moment ve vetknutí = namáhání nosníku v požadovaném místě.



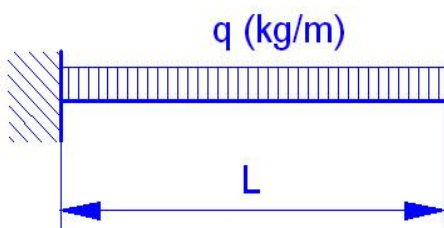
## Jednoduché případy zatížení nosníků:

- 1) Vetknutý nosník s osamělou silou



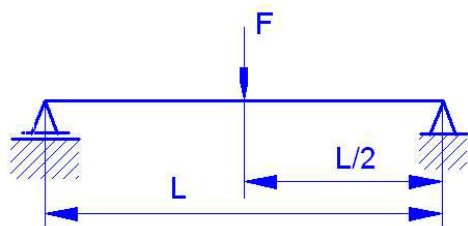
$$M_{omax} = F \cdot L$$

- 2) Vetknutý nosník se spojitým rovnoměrným zatížením



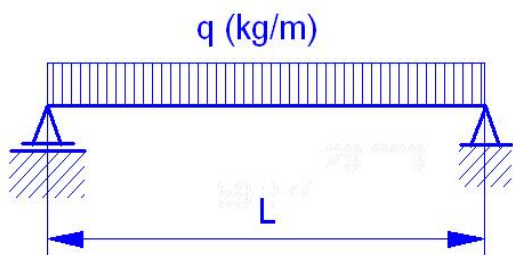
$$M_{omax} = \frac{q \cdot g \cdot L^2}{2}$$

- 3) Nosník na dvou podporách s osamělou silou uprostřed



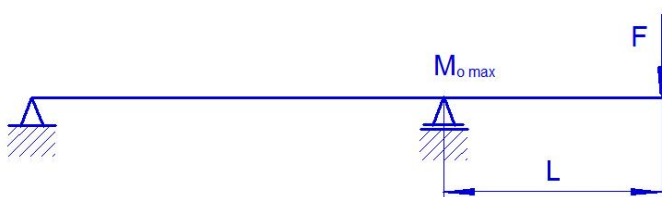
$$M_{omax} = \frac{F \cdot L}{4}$$

- 4) Nosník na dvou podporách se spojitým rovnoměrným zatížením



$$M_{omax} = \frac{q \cdot g \cdot L^2}{8}$$

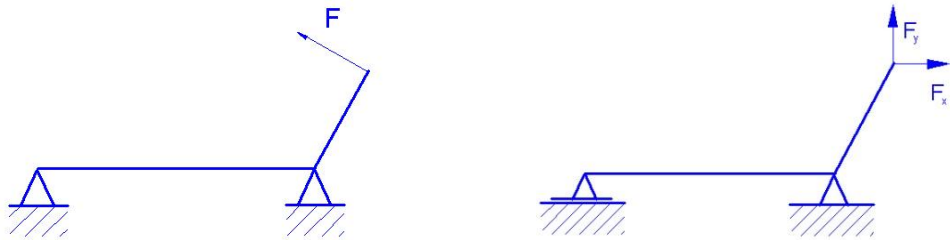
- 5) Nosník na dvou podporách s osamělou silou na převislém konci



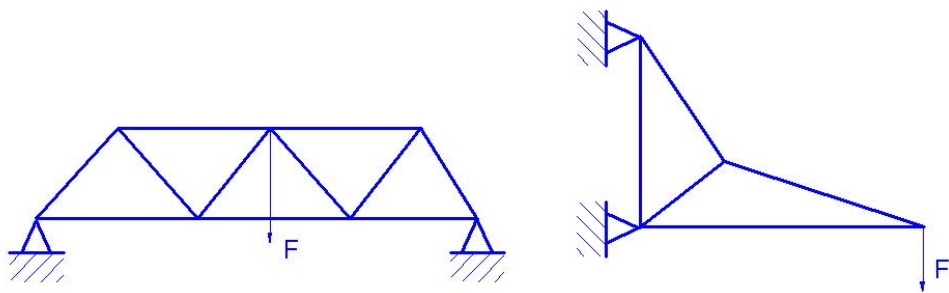
$$M_{omax} = F \cdot L$$

### **Nosníky lomené:**

Výpočet provádíme stejně jako u přímých nosníků. Šikmé síly rozložíme do složek  $F_x$  a  $F_y$  a sestavíme rovnice rovnováhy.



### **Nosníky prutové (příhradové):**



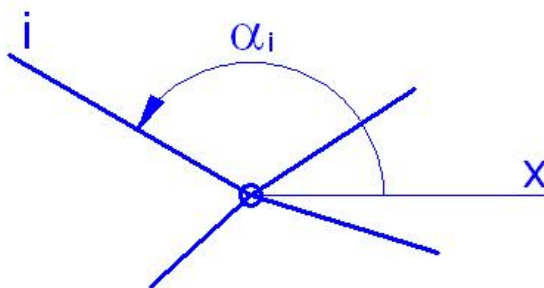
Jednotlivé části (pruty) jsou namáhány pouze tahem nebo tlakem. Proto jsou prutové konstrukce hospodárnější a lehčí než jiné typy nosníků. Jejich výroba je však pracnější. Pruty spojeny v tzv. uzlech (styčnicích), které přenáší mezi jednotlivými pruty pouze síly a nikoli moment. Osy prutů (procházející těžištěm profilu) se protínají v jednom bodě.

Podmínka statické určitosti: počet prutů = 2 · počet styčniců - 3
---

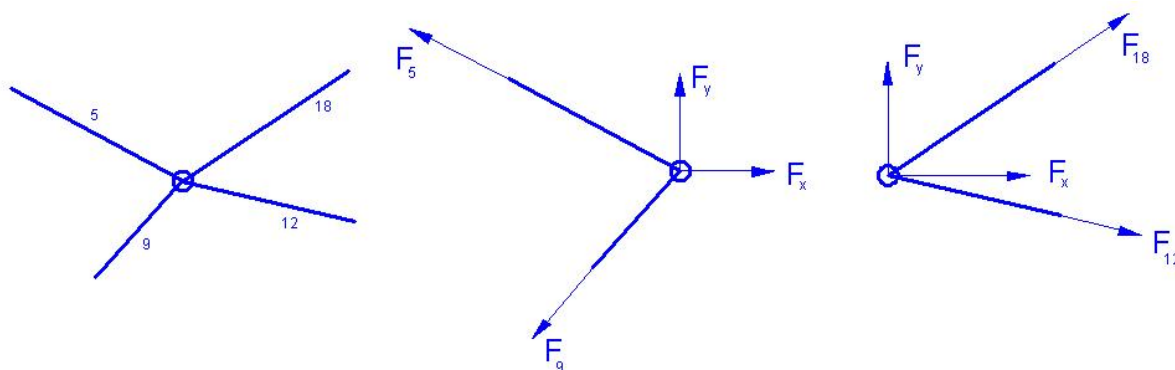
Pokud podmínka není splněna, nemá matematické řešení.

Postup matematického řešení: Vypočteme síly v reakcích (reakce). Jednotlivé pruty očísloveme, označíme jednotlivé uzly. Předpokládáme pouze tahové síly v prutech = síly směřují ven z uzlu. Pokud výpočtem zjistíme, že síla v prutu je záporná, je prut namáhán tlakem. Postupně sestavujeme rovnice pro výpočet neznámých sil v jednotlivých uzlech. Postupujeme po uzlech tak, abychom v následujícím uzlu měly jen dvě neznámé síly. Použijeme rovnice pro skládání obecných sil s rozkladem do směrů  $x$  a  $y$  a rovnice pro výpočet rozkladu síly do obecných směrů. Úhly prutů  $\alpha$  v uzlů jsou orientovány proti směru hodinových ručiček směrem od kladné osy „ $x$ “. Úhel téhož prutu na jeho druhém konci je  $\alpha + 180^\circ$ . Síla na druhém konci prutu má stejné znaménko (i když míří opačným směrem)!!!

Příklad uzlu:



Znamé síly  $F_5$  a  $F_9$  (vstupní), neznámé síly  $F_{12}$  a  $F_{18}$  (výstupní)



První krok: výslednice složek sil vstupních prutů do uzlu se známou silou

$$F_x = \sum F_{xi} = \sum (F_i \cdot \cos \alpha_i) ; F_y = \sum F_{yi} = \sum (F_i \cdot \sin \alpha_i)$$

Všechny síly směřují ven z uzlu i když mají zápornou hodnotu.

Druhý krok: výstupní síly z uzlu = ve výstupních prutech  $n$  a  $m$

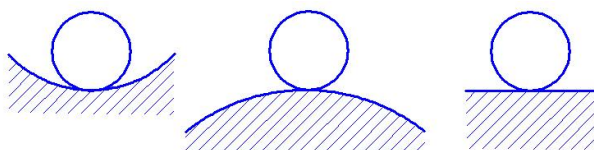
$$F_n = \frac{F_y \cdot \cos \alpha_m - F_x \cdot \sin \alpha_m}{\cos \alpha_n \cdot \sin \alpha_m - \sin \alpha_n \cdot \cos \alpha_m} ; F_m = \frac{F_x \cdot \sin \alpha_n - F_y \cdot \cos \alpha_n}{\cos \alpha_n \cdot \sin \alpha_m - \sin \alpha_n \cdot \cos \alpha_m}$$

Pokud síly vycházejí kladné = tahové, pokud vyjdou záporné = tlakové.

Tato metoda je vhodná pro zpracování v tabulkovém procesoru (Excel).

## **Stabilita:**

Rovnováha tělesa – stabilní, vratká (labilní) a volná

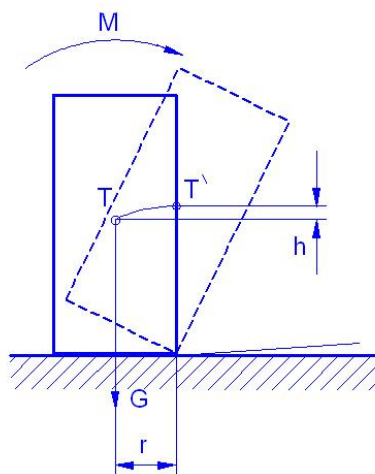


Při porušení rovnováhy mohou nastat 3 jevy:

- 1) Těleso se vrátí samo do původní rovnovážné polohy = rovnováha stabilní – je dosažena tehdy, je-li těžiště tělesa v nejnižší možné poloze.
- 2) Těleso se již samo nevrátí do rovnovážné polohy – pohybuje se většinou dále se zrychlením = rovnováha vratká
- 3) Těleso je v rovnováze v každé nové poloze = rovnováha volná – těžiště tělesa se pohybuje po vodorovné dráze

Stabilita proti převržení:

- a) Statická = moment potřebný pro převržení kolem klopného bodu (kritický klopný moment =  $G \cdot r$ )
- b) Dynamická = práce potřebná pro převržení kolem klopného bodu (kritická energie =  $G \cdot h$ )



Bezpečnost proti převržení:

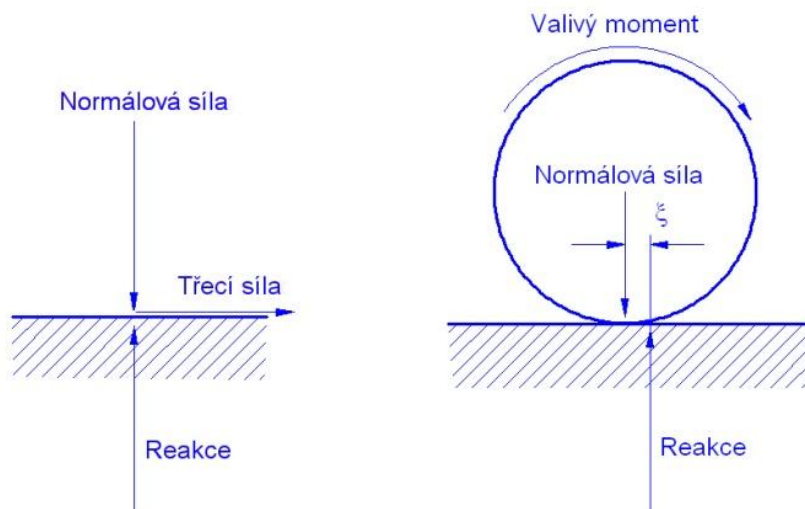
$$k = \frac{M_{krit}}{M_{skut}} = \frac{P_{krit}}{P_{skut}} > 1$$

## Tření:

**Normálová síla** = základní podmínka vzniku tření

Součinitel tření – závislost na materiálech, drsnosti, mazání a době.

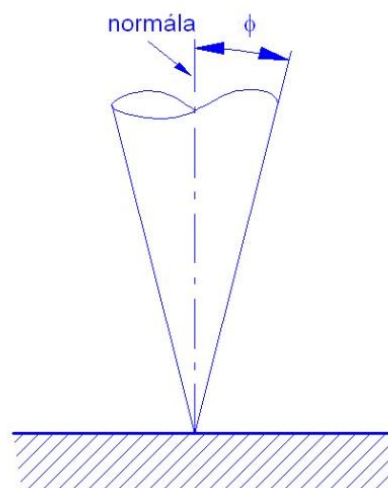
- a) Smykové  $T = N \cdot f$  , kde  $f$  je součinitel smykového tření
- b) Valivé  $M_t = N \cdot \xi$  , kde  $\xi$  je poloměr valivého odporu





Třecí kužel – kolem normály s úhlem sklonu povrchy  $\varphi = \operatorname{tg}^{-1}(f)$

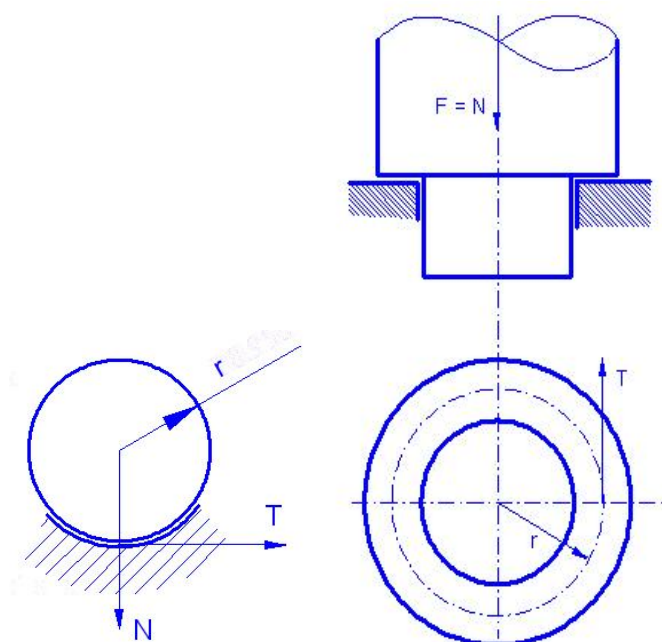
Pokud se síla tlačící na těleso na podložce nachází v třecím kuželu, nevede těleso do pohybu.



### Speciální případy tření v technické praxi:

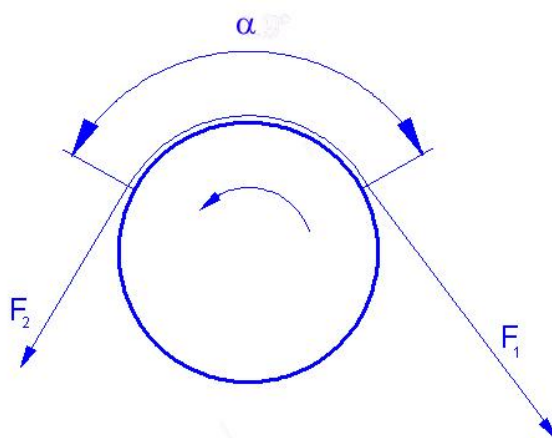
1. Čepové (radiální a patní) tření

$$M_t = N \cdot f \cdot r$$

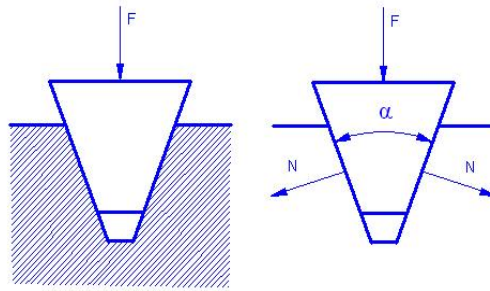


2. Opaskové (vláknové) tření na válcové ploše –

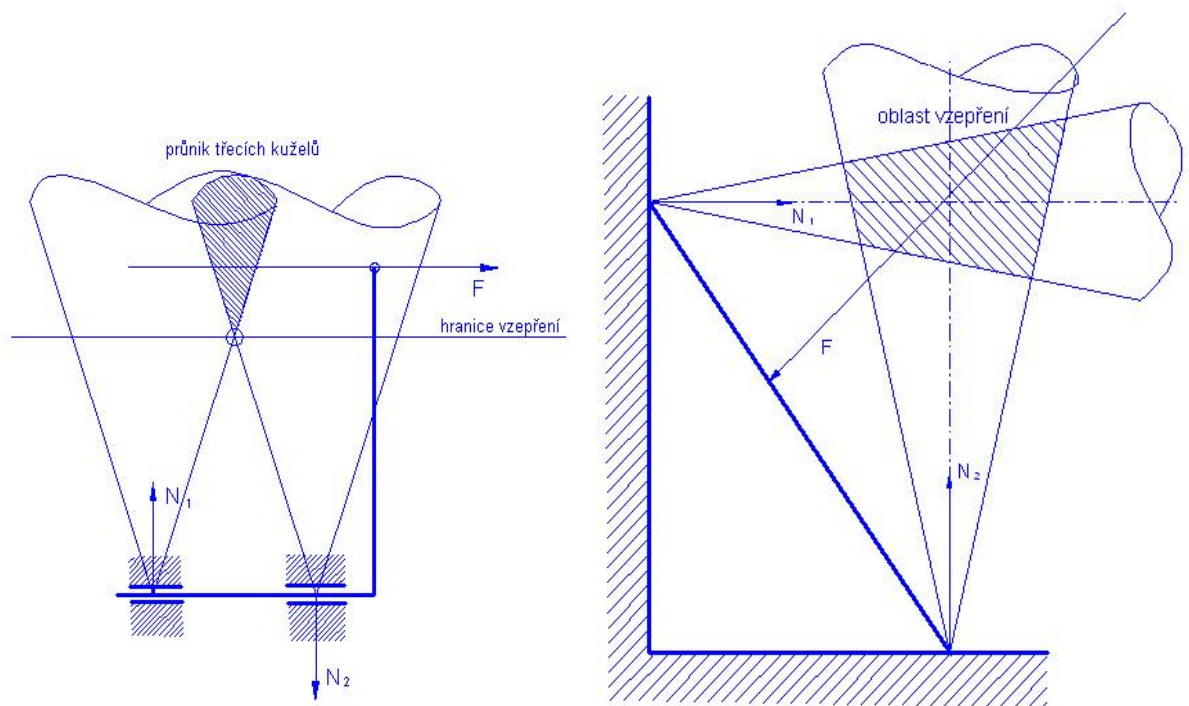
Síla na tažné větvi opasku je  $F_1 = F_2 \cdot e^{f \cdot \alpha}$ , kde  $\alpha$  je úhel opásání



3. Tření v klínové drážce – pohyb ve směru drážky  $T = F \cdot f \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ , kde  $\alpha$  je vrcholový úhel drážky



4. Vzepření tělesa – síla prochází průnikem dvou třecích kuželů nevede těleso do pohybu.



5. Tření ve šroubovém spoji:

Utahovací moment  $M_t = \frac{d_2}{2} \cdot F_o \cdot \operatorname{tg}(\gamma + \varphi)$ , kde  $\varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{f}{\sin \alpha}\right)$

$\gamma$  je úhel stoupání šroubovice závitu

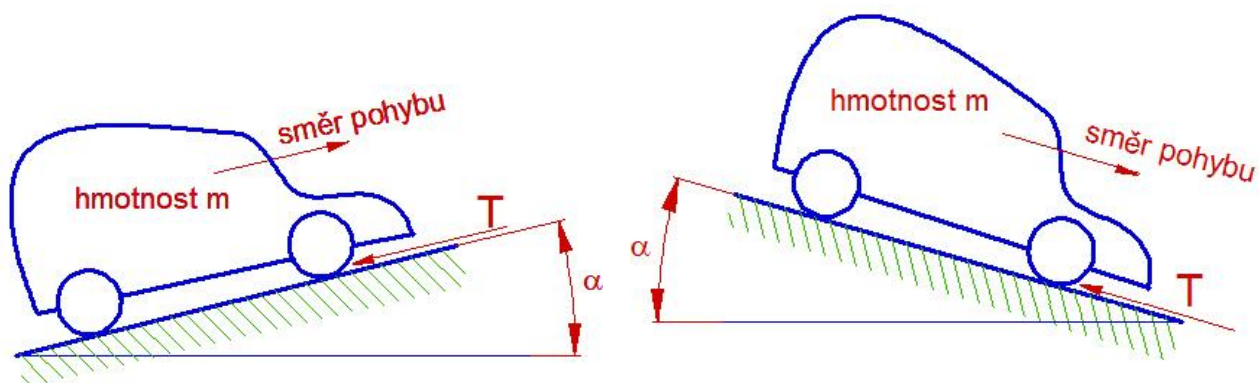
$\alpha$  je úhel sklonu boku závitu k normále (pro metrický závit =  $60^\circ$ , pro plochý závit =  $90^\circ$ )

$d_2$  je střední průměr závitu

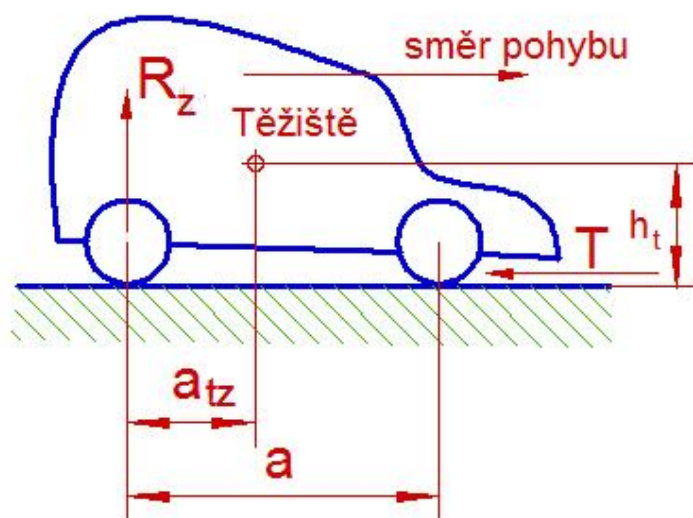
Utahovací moment pro normalizované metrické závity

$M_u = 0,18 \cdot D \cdot F_o$ ;  $F_o$  = osová síla,  $D$  = velký průměr závitu

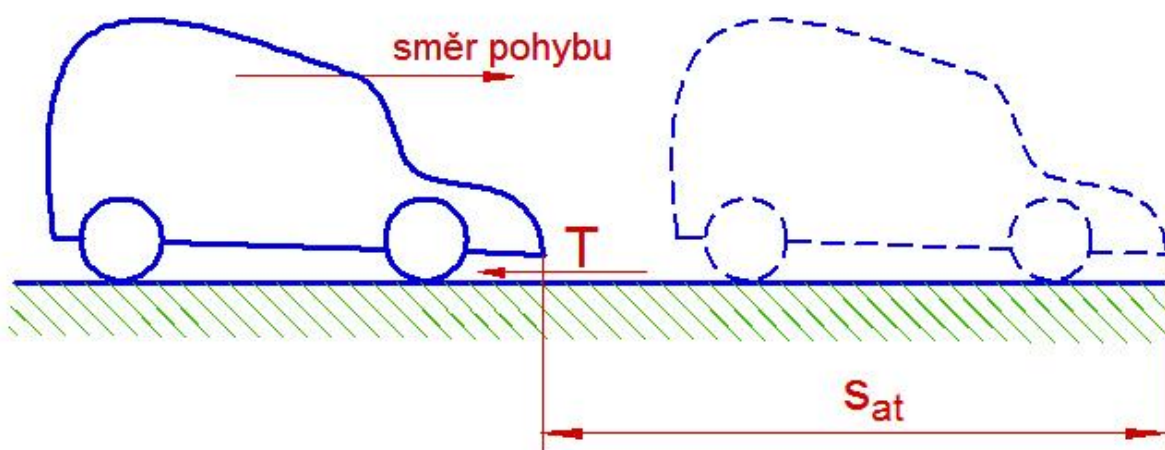
## 6. Brzdění vozidel:



Maximální brzdňý účinek  $T = mg\mu \cdot \cos\alpha$ , kde  $\alpha$  je úhel stoupání nebo klesání vozovky a  $\mu$  je adheze



Odlehčení zadní nápravy při brzdění:  $R_z = m \cdot g \cdot \frac{a_{tz} - \mu \cdot h_t}{a}$



Brzdňá dráha:  $s_{At} = \frac{v_A^2}{2g\mu}$

Brzdňá dráha (s reakční dobou):  $s_{At} = v_A \cdot t_{RA} + \frac{v_A^2}{2g\mu}$

Bezpečňá vzdálenost:  $L > v \cdot t_{RA} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g\mu}$

## **Pružnost a pevnost:**

Cílem PP je zabránit ztrátě funkčnosti součástí, zařízení a konstrukcí způsobené nadměrnou deformací a porušováním, případně rekonstruovat příčiny, proč k této ztrátě funkčnosti došlo před uplynutím požadované doby jejich životnosti.

### Přístupy PP

- a) **Intuitivní** – navrhování způsobu řešení na základě znalostí a zkušeností, bez schopnosti exaktního zdůvodnění jeho správnosti nebo optimálnosti. Tento přístup je u konstruktéra primární a důležitý, ale rozhodně ne postačující. Jedině intuitivně je možné vybrat z obrovského množství možných variant taková řešení, která rozumně přicházejí v úvahu, ale musí být následně posouzena jinými přístupy.
- b) **Výpočtový** – založený na vytvoření výpočtového modelu, tedy zavedení takových zjednodušení, která na jedné straně umožní popis reality dostupnými matematickými prostředky a na druhé straně zajistí přijatelnou shodu s realitou.

#### Výpočtové modely

- analytické – teorie prutu, skořepin, desek, . . .
- numerické – metoda konečných prvků, metoda hraničních prvků, . . .

- c) **Experimentální** - experimenty lze provádět na reálném objektu nebo na jeho materiálním modelu. Nevýhodou experimentu na reálném objektu je ekonomická i časová náročnost, některé experimenty nejsou ani možné (atomové elektrárny, letadla) nebo jsou natolik drahé, že se k nim přistupuje až po důkladném výpočtovém modelování (bariérová zkouška automobilu). Experiment na modelu vyžaduje zase existenci vhodných měřících metod a zařízení pro jejich realizaci a dále splnění jistých kritérií, zajišťujících přenositelnost výsledku na dílo (např. vodní turbíny). Experiment je nezbytný pro jakékoliv výpočtové modelování, pro které zajišťuje vstupní údaje (např. vlastnosti materiálu) a rovněž slouží verifikaci výsledku.

Základní úlohu PP lze pak formulovat jako analýzu vlivu zatížení tělesa na jeho deformaci a napjatost s ohledem na riziko vzniku mezních stavů.

### Mezní stavy při namáhání těles:

- ☐ Plastická deformace = trvalá změna tvaru = překročení meze kluzu
- ☐ Destrukce tvaru = zničení, přetržení, zlomení, přestřižení, ...
- ☐ Ztráta stability = prudká změna tvaru
- ☐ Únava materiálu = náhlá destrukce při dynamickém zatížení
- ☐ Creep = náhlá destrukce při dlouhodobém zatížení (za zvýšené teploty)

Pro zjednodušení se budeme zabývat jen nejjednodušším mezním stavem – **mezí kluzu**.

Ocel se při zatížení pod mezí kluzu chová pružně (elasticky) s lineárním průběhem deformace (viz trhací diagram).

## Mez kluzu při zatížení tahem:

Pro houževnaté uhlíkové oceli  $\sigma_{Kt} = 0,6 \cdot \sigma_{Pt}$ ,

pro legované oceli  $\sigma_{Kt} = 0,8 \cdot \sigma_{Pt}$

Poměrné prodloužení (měrná deformace)  $\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l}$

Napětí v pomyslném řezu při zatížení tahem = normálové napětí  $\sigma = \frac{F}{S}$

Hookův zákon = lineární závislost napětí na deformaci:  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

E = Yangův modul pružnosti v tahu (pro ocel  $2 - 2,2 \cdot 10^5$  MPa, pro litinu  $1,1 \cdot 10^5$  MPa).

Poissonovo číslo = poměr mezi zúžením a prodloužením při tahu (pro ocel = 0,3)  $\mu = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon_s = \frac{\Delta d}{d}$

**Dovolené napětí v tahu** = maximální povolené napětí, které zajišťuje spolehlivé zatížení součásti při zajištění požadované míře bezpečnosti (k)

Pro houževnaté oceli  $\sigma_{Dt} = \frac{\sigma_{Kt}}{k} = \frac{(0,6 \text{ nebo } 0,8) \cdot \sigma_{Pt}}{k}$

Pro křehké materiály  $\sigma_{Dt} = \frac{\sigma_{Pt}}{k}$

Volba míry bezpečnosti závisí na druhu zatížení, materiálu, funkci a významu součásti, přesnosti výpočtu, teplotě, nebezpečnosti zařízení,...

k = 1,5 – 3 pro výpočet z meze kluzu

k = 4 – 6 pro výpočet z meze pevnosti.

Skutečné (vypočtené) napětí v konstrukci pak musí být $\sigma \leq \sigma_{Dt}$
---

**Při dynamickém zatížení** snížíme dovolené napětí opravným koeficientem

$$c : \sigma_{DtII} = \sigma_{Dt} \cdot c$$

materiál	statické zatížení	míjivé zatížení	střídavé zatížení
nízkouhlíkatá ocel (11 340 – 11 500)	c = 1	c = 0,85	c = 0,65
(11 600 -11 800)	c = 1	c = 0,75	c = 0,6
vysokouhlíkatá ocel, ocelolitina, šedá litina	c = 1	c = 0,75	c = 0,55
legované oceli	c = 1	c = 0,7	c = 0,45
Hliník	c = 1	c = 0,65	c = 0,5
Bronz	c = 1	c = 0,6	c = 0,35

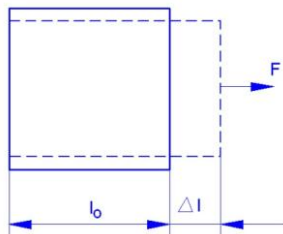
<b>Pro běžnou konstrukční ocel tedy je:</b> $\sigma_{Dt} = \frac{0,6 \cdot \sigma_{Pt}}{k} \cdot c$
---

**Míra bezpečnosti konstrukce je:**

$$k = \frac{0,6 \cdot \sigma_{pt}}{\sigma}$$

## 1. Zatížení v tahu

Základní rovnice  $\sigma_t = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt}$



Prodloužení  $\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{F \cdot l}{S \cdot E}$

Potřebný průřez  $S \geq \frac{F}{\sigma_{Dt}}$

Únosnost  $F \leq S \cdot \sigma_{Dt}$

Příklady:

□ Táhlo prutového krakorce

□ Zatížení vlastní hmotností – lano výtahu  $\sigma_t = \rho \cdot g \cdot l$

□ Zatížení odstředivou silou – věnec kola, rameno  $\sigma_t = \frac{mr\omega^2}{S}$ ;  $\omega_{max} = \sqrt{\frac{\sigma_{Dt}}{r^2 \cdot \rho}}$

□ Nalisování za tepla – výpočet přesahu (zděř, svařovaná kolejnice)

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t, \quad \sigma_t = \alpha_t \cdot E \cdot \Delta t, \quad \text{pro ocel } \alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} [1/K]$$

□ Tenkostěnné tlakové nádoby (PPP)  $\sigma_t = \frac{p \cdot D}{2 \cdot t}$

□ Silnostěnné nádoby

$$\sigma_{ax} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad \sigma_r = \sigma_{ax} + \frac{A}{r^2}, \quad A = \frac{(p_1 - p_2) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$$

□ Nalisovaný spoj – silnostěnná nádoba ( $k = 1,5 - 2,2$ )

$$p = \frac{2 \cdot k \cdot M_k}{\pi \cdot d_1^2 \cdot l \cdot f}, \quad \Delta d = \frac{d_1 \cdot p}{E} \cdot (C + 1), \quad C = \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2^2 - d_1^2}, \quad p_{max} = \frac{\Delta d_{max} \cdot E}{d_1 \cdot (C + 1)},$$

$$\sigma_{red} = p_{max} \cdot \sqrt{C^2 + 2\mu C + 1}, \quad \text{montážní vůle } v_m = 0,01 \cdot \sqrt{d_1}, \quad \Delta t = \frac{\Delta d_{max} + v_m}{\alpha \cdot d_1}$$

□ Šroubový spoj

Materiál šroubů:

Označení	4A	4D	4S	5D	5S	6S	6G	8G
Mez kluzu	200	210	230	280	400	480	540	640

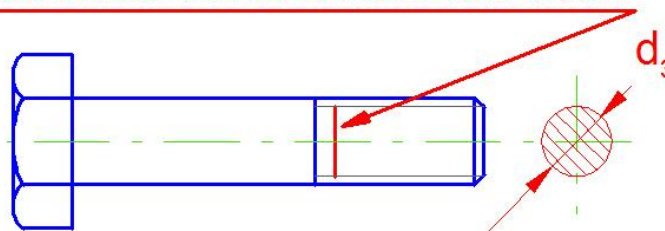
Utahovací moment:  $M_u \cong 0,18 \cdot F_o \cdot D$

Druh šroubového spoje	Dovolené napětí	Pozn.
S předpětím – statické z.	$\sigma_{Dt} = (0,3 - 0,15) \sigma_k$	Větší hodnoty pro menší pevnost a větší průměr

S předpětím – míjivé z.	$\sigma_{Dt} = (0,3 - 0,1)\sigma_k$	Větší hodnoty pro menší pevnost a větší průměr
Bez předpětí – utahovaný v nezátíženém stavu	$\sigma_{Dt} = (0,8)\sigma_k$	0,6 pro míjivé a 0,45 pro střídavé zatížení
Bez předpětí – utahovaný v zatíženém stavu	$\sigma_{Dt} = (0,6)\sigma_k$	0,45 pro míjivé a 0,35 pro střídavé zatížení
Tvarový spoj	$\tau_D = (0,4)\sigma_k$	Pro rázové zatížení 0,3
Silový spoj	$\sigma_{Dt} = (0,3 - 0,2)\sigma_k$	0,6 pro míjivé a 0,45 pro střídavé zatížení

Příklady pevnostních výpočtů šroubů (dimenzování):

kritické místo šroubu namáhaného tahem



Při dimenzování šroubového spoje volíme nejbližší vyšší rozměr závitu!

POZOR závity se vyrábějí pouze ve vybraných rozměrech - viz. normy závitů!!!

Potřebné vzorce:

Skutečné napětí  $\sigma_t = \frac{F_o}{\frac{\pi d_3^2}{4}} \leq \sigma_{Dt}$

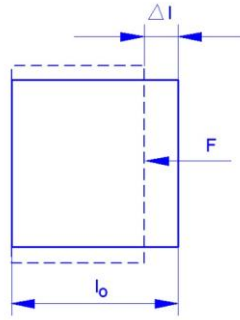
Kritický průřez jádra šroubu  $S = \frac{\pi d_3^2}{4}$

Z toho průměr jádra šroubu  $d_3 = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$

Velký průměr hrubého metrického závitu  $d = \frac{d_3}{0,8}$

## 2. Zatížení tlakem (v celém objemu)

Základní rovnice	$\sigma_d = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt}$
------------------	---



Dovolené napětí pro houževnatou ocel:  $\sigma_{Dd} = \sigma_{Dt}$

Pro litinu a jiné křehké materiály:  $\sigma_{Dd} = \frac{\sigma_{Pd}}{k}$  ,

Míra bezpečnosti:  $k = 2,5 - 4$  ... kalená ocel

$k = 4 - 5$  ... šedá litina

$k = 8 - 10$  ... litý hliník

$k = 10 - 30$  ... kámen

$k = 4 - 8$  .... beton

$k = 6 - 12$  .... dřevo

Příklady: pilíř mostu, razník

## 3. Zatížení otláčením (místní tlak)

Rozložení tlaku ve styku dvou těles není rozloženo rovnoměrně ve stykové ploše!

Dovolený měrný tlak mezi dvěma součástmi z různých materiálů je dán součástí s menší pevností v tlaku.

Základní rovnice	$p = \frac{F}{S} \leq p_D$
------------------	----------------------------

Dovolený tlak:  $p_D = \frac{\sigma_{Dt}}{k_p}$  , bezpečnost  $k_p = 1$  až 6, 6 pro pohyblivý styk.

Příklady:

□ Pero drážka

□ Kontrola šroubových spojů na otláčení

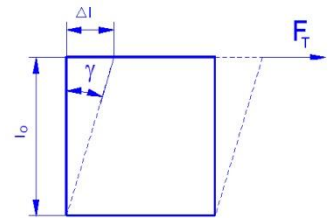


Dovolené zatížení v tlaku mezi závity šroubu a matice ovlivňuje nutnou hloubku vzájemného zašroubování. Ta je dána druhem měkčího z obou materiálů. Doporučené hodnoty jsou pro kombinace:

Ocelový šroub + ocelová matice ->	Hloubka zašroubování = 1 x průměr šroubu
Ocelový šroub + litinová matice ->	Hloubka zašroubování = 1,25 x průměr šroubu
Ocelový šroub + hliníková matice ->	Hloubka zašroubování = 2 x průměr šroubu

Skutečné zatížení závitů je takové, že první zašroubovaný závit nese 50% síly, druhý závit 25%, třetí 12,5% , .....

#### 4. Zatížení na smyk



Tečné napětí – není rozděleno v ploše rovnoměrně!

Zkosení elementu:  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta l}{l_0} \cong \gamma$

Pevnost ve smyku:  $\tau_{Ps} \cong 0,6 \cdot \sigma_{Pt}$

Hookův zákon:  $\tau_s = \gamma \cdot G = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot G$

Modul pružnosti ve smyku:  $G = \frac{E}{2(1+\mu)} \cong \frac{3}{8} \cdot E$  , pro ocel  $\cong 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Základní rovnice = napětí ve smyku:  $\tau_s = \frac{F_T}{S} \leq \tau_{Ds}$

Dovolené napětí ve smyku: Pro houževnatou ocel  $\tau_{Ds} \cong 0,6 \cdot \sigma_{Dt}$

Pro křehké materiály  $\tau_{Ds} \cong (0,8 \div 1) \cdot \sigma_{Dt}$

Úprava pro dynamické zatížení: míjivé x 0,85 střídavé x 0,65

Příklady:

- ☐ Nýt a dvě pásnice
- ☐ Lícovaný šroub a příruba
- ☐ Radiální kolík v náboji
- ☐ Axiální kolík v náboji
- ☐ Těsné pero

## Výpočet svarů namáhaných na smyk:

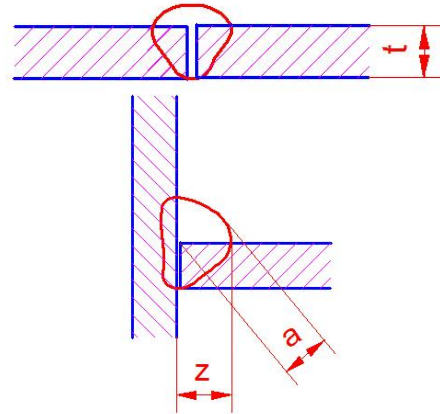
Dovolené napětí ve svaru: kde  $\sigma_{Dt}$  je dovolené napětí základního materiálu

podélný (boční) svar  $\tau_{Ds} = 0,65 \cdot m \cdot \sigma_{Dt}$

příčný (čelní) svar  $\tau_{Ds} = 0,75 \cdot m \cdot \sigma_{Dt}$

součinitel tloušťky materiálu  $m = 1,3 - 0,03 \cdot t$  pro  $t < 10$ , jinak  $m = 1$

Tupý svar:  $S = l \cdot t$



Koutový svar:  $S = l \cdot 0,7 \cdot z$   
nebo  $S = l \cdot a$

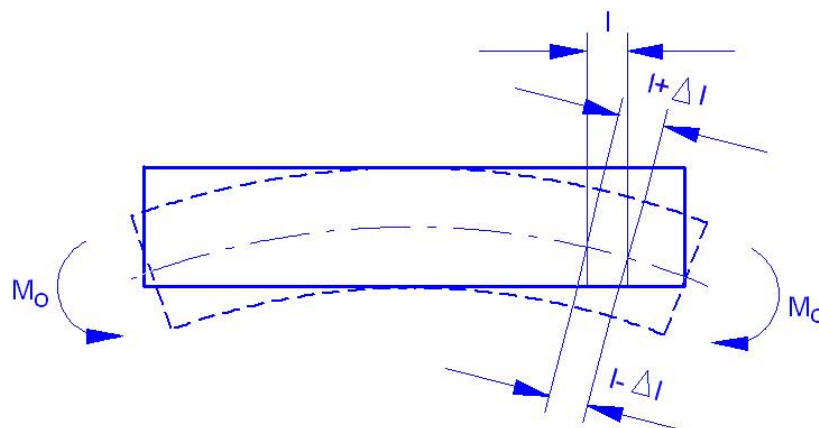
Příklady:

- ☐ Svar pásnic
- ☐ Svar páky a náboje
- ☐ Kombinovaný koutový svar

## 5. Zatížení ohybem

Ohybem jsou namáhány nosníky = délka je výrazně větší než příčný rozměr

Deformace ohybem – rozložení kolem těžiště plochy průřezu



Normálové napětí je tím větší čím dále od těžiště  $\sigma_o = \frac{M_o}{I_x} \cdot e$

Modul v ohybu:  $W_{ox} = \frac{I_x}{e_{max}}$

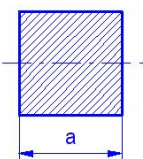
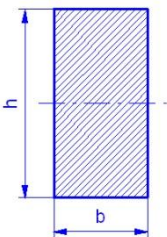
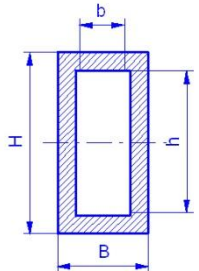
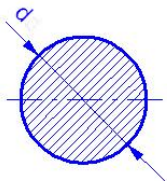
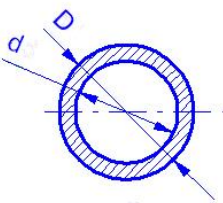
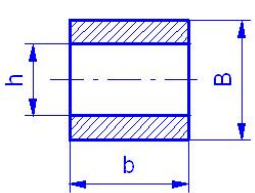
Základní rovnice = napětí v ohybu:  $\sigma_o = \frac{M_o}{W_{ox}} \leq \sigma_{Dt}$

Průřezový modul v ohybu získáme:

- ☐ U válcovaných profilů přímo z norem (strojnických tabulek)
- ☐ U jednoduchých profilů přímo ze vzorce (viz tabulka níže)
- ☐ U složených profilů výpočtem pomocí Steinerovy věty

Průřezový modul počítáme v **[cm]** a pak napětí vychází v **[MPa]**.

Tabulka jednoduchých profilů:

profil	$I_x$ [cm <sup>4</sup> ]	$W_{ox}$ [cm <sup>3</sup> ]
	$I_x = \frac{1}{12} a^4$	$W_{ox} = \frac{1}{6} a^3$
	$I_x = \frac{1}{12} b h^3$	$W_{ox} = \frac{1}{6} b h^2$
	$I_x = \frac{1}{12} (B H^3 - b h^3)$	$W_{ox} = \frac{B H^3 - b h^3}{6 H}$
	$I_x = \frac{\pi d^4}{64}$	$W_{ox} = \frac{\pi d^3}{32} \cong 0,1 d^3$
	$I_x = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$	$W_{ox} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 D}$
	$I_x = \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$	$W_{ox} = \frac{b}{6 H} (H^3 - h^3)$

Steinerova věta:  $I_{xc} = \sum I_{xi} + \sum (S_i \cdot e_i^2)$ , kde „e<sub>i</sub>“ je excentricita těžiště elementu od výsledného těžiště složeného průřezu.

Pro složené profily postupujeme:

- ☐ Vypočtete polohu těžiště složeného profilu
- ☐ Steinerovou větou vypočteme celkový moment setrvačnosti
- ☐ Vypočteme největší vzdálenost krajního vlákna profilu
- ☐ Vypočteme modul v ohybu

Příklady:

- ☐ Lávka jeřábu s kladkostrojem
- ☐ Nájezdová rampa
- ☐ Porovnání únosnosti složených profilů
- ☐ Výpočet charakteristik průřezu v Excelu

## 6. Zatížení krutem

$$\text{Základní rovnice } \tau_k = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}$$

Dovolené napětí:

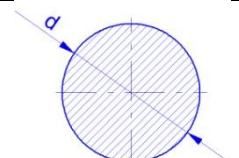
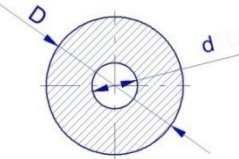
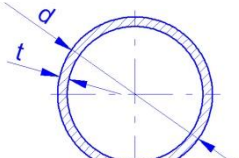
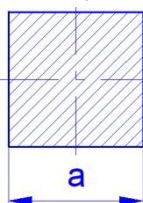
Nízkouhlíkatá ocel  $\tau_{Dk} = 0,6 \cdot \sigma_{Dt}$

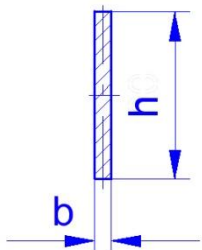
Pružinová ocel  $\tau_{Dk} = 0,8 \cdot \sigma_{Dt}$

Šedá litina  $\tau_{Dk} = (1,2 - 1,6) \cdot \sigma_{Dt}$

Průřezové charakteristiky:

Průřezový modul počítáme v **[cm]** a pak napětí vychází v **[MPa]**.

profil	$I_p$ [cm <sup>4</sup> ]	$W_k$ [cm <sup>3</sup> ]
	$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$	$W_k = \frac{\pi d^3}{16}$
	$I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$	$W_k = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$
	$I_p = \frac{\pi d^3 t}{4}$	$W_k = \frac{\pi d^2 t}{2}$
	$I_p = \frac{a^4}{7}$	$W_k = \frac{a^3}{5}$

	$I_p = \frac{hb^3}{3}$	$W_k = \frac{hb^2}{3}$
---	------------------------	------------------------

Úhel zkroucení

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{I_p \cdot G}$$

## 7. Kombinované zatížení

a) Kombinace dvou normálových napětí (tah + ohyb, tlak + ohyb)

$$\sigma_{red} = \sigma_t + \sigma_o \leq \sigma_{Dt}$$

b) Kombinace dvou tečných napětí (smyk + krut)

$$\tau_{red} = \tau_s + \tau_k \leq \tau_D$$

c) Kombinace normálového a tečného napětí (tah + krut, ohyb + krut, ....)

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \alpha_B \cdot \tau^2} \leq \sigma_{Dt}$$

Bachův opravný součinitel:

$\alpha_B = 0,4$  ... statický krut

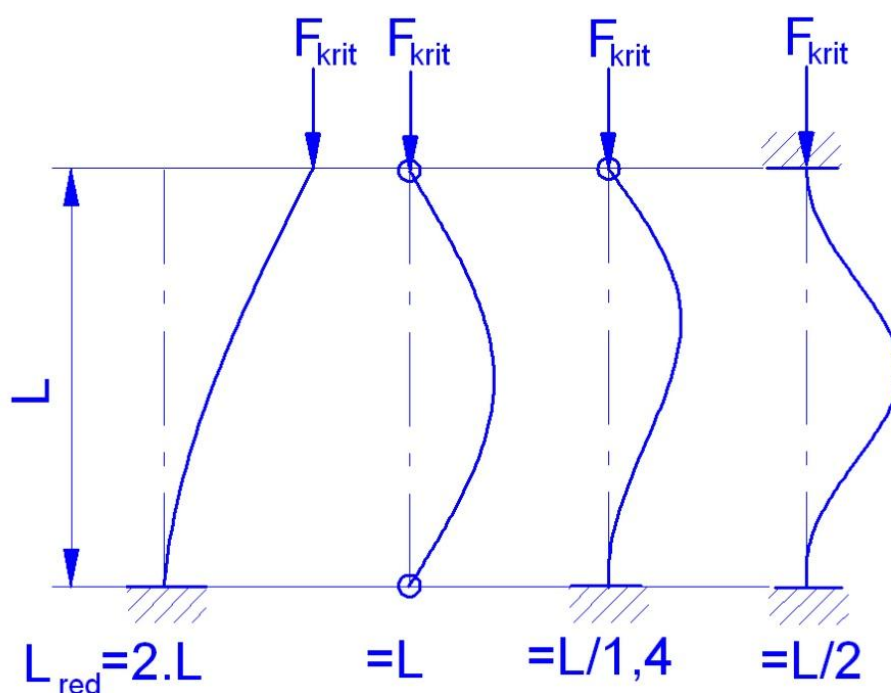
$\alpha_B = 0,7$  ... míjivý krut

$\alpha_B = 1$  ... střídavý krut

## 8. Zatížení na vzpěr

– dostatečně dlouhé a štíhlé pruty

Eulerova kritická síla:  $F_{krit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_{red}^2}$



Podmínka dostatečné štíhlosti prutu pro houževnatou ocel:

$$\lambda = \frac{l_{red}}{\sqrt{\frac{I_{min}}{S}}} > 100$$

Dovolená síla:  $F = \frac{F_{krit}}{k_E}$

Bezpečnost podle Eulera:

$k_E = 2 - 3$  ... ocelové konstrukce

$k_E = 5 - 6$  ... litinové konstrukce

$k_E = 2 - 8$  ... dřevěné konstrukce

## 9. Kmitání (dlouhých) hřídelů:

### Torzní kmity:

Dovolené poměrné zkroucení:  $\vartheta_D = \frac{\varphi}{L} = 0,25 \div 1 [^{\circ}/m]$

Úhel zkroucení:  $\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} [rad] = \frac{180 \cdot M_k \cdot l}{\pi \cdot G \cdot I_p} [^{\circ}]$ ; pro ocel  $G = 8 \cdot 10^{10} [Pa]$

Přenášený výkon:  $P = M_k \cdot \omega = \frac{M_k \cdot \pi \cdot n}{30}$

Krouticí moment:  $M_k = \frac{30 P}{\pi \cdot n}$

Průměr hřídele:  $d = \sqrt{\frac{180 \cdot 32 \cdot M_k \cdot l}{\pi^2 \cdot G \cdot \vartheta_D}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 180 \cdot 32 \cdot P \cdot l}{\pi^2 \cdot n \cdot G \cdot \vartheta_D}}$

### Ohybové kmity:

Kritické otáčky  $n_{krit} = \frac{15,76}{\sqrt{y}}$ ;  $y$  = průhyb způsobený vlastní vahou.